

2-15-2024

Research Advances on Electric Vehicle Routing Problem Models and Algorithms

Helin Zhuang

School of Sciences, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, China; School of Information Science and Engineering, Jiaxing University, Jiaxing 314001, China, zhuanghl1998@163.com

Xiaoyun Xia

School of Information Science and Engineering, Jiaxing University, Jiaxing 314001, China, xi Xiaoyun@zjxu.edu.cn

Kangshun Li

School of Artificial Intelligence, Dongguan City University, Dongguan 523430, China

Zefeng Chen

School of Artificial Intelligence, Sun Yat-sen University, Zhuhai 519082, China

See next page for additional authors

Follow this and additional works at: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal>



Part of the [Artificial Intelligence and Robotics Commons](#), [Computer Engineering Commons](#), [Numerical Analysis and Scientific Computing Commons](#), [Operations Research, Systems Engineering and Industrial Engineering Commons](#), and the [Systems Science Commons](#)

This Overview is brought to you for free and open access by Journal of System Simulation. It has been accepted for inclusion in Journal of System Simulation by an authorized editor of Journal of System Simulation. For more information, please contact xtfzxb@126.com.

Research Advances on Electric Vehicle Routing Problem Models and Algorithms

Abstract

Abstract: The development of electric vehicle provides an alternative to conventional fuel vehicles for logistics companies. Using electric vehicles has the merits of less pollution and low noise, but the characteristics of limited cruising range and limited number of charging stations are new challenges. Electric vehicle routing problems(EVRPs) have been widely used in transportation, logistics and other fields, and have received much attention. A comprehensive survey of EVRP and its many variants are presented and the respective backgrounds and applicable conditions are analyzed. The solving approaches of EVRPs are categorized, the strengths and weaknesses of each algorithm are analyzed, and the related practical applications are reviewed. The basic information and some node distribution maps of EVRP benchmark dataset and EVRP with time windows benchmark dataset are given, and the algorithms that have been applied in EVRP benchmark dataset are compared and analyzed. The future development trends of EVRPs is depicted.

Keywords

electric vehicle, vehicle routing problem, low carbon, heuristic algorithms, logistics

Authors

Helin Zhuang, Xiaoyun Xia, Kangshun Li, Zefeng Chen, and Xianchao Zhang

Recommended Citation

Zhuang Helin, Xia Xiaoyun, Li Kangshun, et al. Research Advances on Electric Vehicle Routing Problem Models and Algorithms[J]. Journal of System Simulation, 2024, 36(2): 320-337.

电动汽车路径规划模型与算法研究进展

庄鹤林^{1,2}, 夏小云^{2*}, 李康顺³, 陈泽丰⁴, 张先超²

(1. 江西理工大学 理学院, 江西 赣州 341000; 2. 嘉兴大学 信息科学与工程学院, 浙江 嘉兴 314001;
3. 东莞城市学院 人工智能学院, 广东 东莞 523430; 4. 中山大学 人工智能学院, 广东 珠海 519082)

摘要: 电动车技术的发展为物流企业提供了一种配送车辆的新方案。电动车具有低污染、低噪音等优点, 其续航短、充电站有限等特性也带来了新的挑战。电动车路径问题(electric vehicle routing problems, EVRPs)在交通运输、物流管理等领域得到了广泛应用, 受到了众多学者的关注。整理了电动车路径问题及其主流变体的问题描述, 分析了其各自的提出背景与适用场景。对 EVRPs 的求解方法和技术做了归类, 分析了各方法的优劣, 并介绍了相关实际应用。给出了 EVRP 基准数据集与带时间窗的电动车辆路径问题的基准数据集的基本信息和部分节点分布图, 对比分析了已对 EVRP 基准数据集应用的算法。展望了 EVRPs 的发展前景。

关键词: 电动汽车; 路径规划; 低碳; 启发式算法; 物流

中图分类号: TP18;U116.2 文献标志码: A 文章编号: 1004-731X(2024)02-0320-18

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.22-1161

引用格式: 庄鹤林, 夏小云, 李康顺, 等. 电动汽车路径规划模型与算法研究进展[J]. 系统仿真学报, 2024, 36(2): 320-337.

Reference format: Zhuang Helin, Xia Xiaoyun, Li Kangshun, et al. Research Advances on Electric Vehicle Routing Problem Models and Algorithms[J]. Journal of System Simulation, 2024, 36(2): 320-337.

Research Advances on Electric Vehicle Routing Problem Models and Algorithms

Zhuang Helin^{1,2}, Xia Xiaoyun^{2*}, Li Kangshun³, Chen Zefeng⁴, Zhang Xianchao²

(1. School of Sciences, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, China; 2. School of Information Science and Engineering, Jiaxing University, Jiaxing 314001, China; 3. School of Artificial Intelligence, Dongguan City University, Dongguan 523430, China;
4. School of Artificial Intelligence, Sun Yat-sen University, Zhuhai 519082, China)

Abstract: The development of electric vehicle provides an alternative to conventional fuel vehicles for logistics companies. Using electric vehicles has the merits of less pollution and low noise, but the characteristics of limited cruising range and limited number of charging stations are new challenges. Electric vehicle routing problems(EVRPs) have been widely used in transportation, logistics and other fields, and have received much attention. A comprehensive survey of EVRP and its many variants are presented and the respective backgrounds and applicable conditions are analyzed. The solving approaches of EVRPs are categorized, the strengths and weaknesses of each algorithm are analyzed, and the related practical applications are reviewed. The basic information and some node distribution maps of EVRP benchmark dataset and EVRP with time windows benchmark dataset are given, and the algorithms that have been applied in EVRP benchmark dataset are compared and analyzed. The future development trends of EVRPs is depicted.

Keywords: electric vehicle; vehicle routing problem; low carbon; heuristic algorithms; logistics

收稿日期: 2022-09-30 修回日期: 2022-12-26

基金项目: 国家自然科学基金(62206313, 12161043, 61703183, 61573157); 浙江省自然科学基金(LGG19F030010)

第一作者: 庄鹤林(1998-), 男, 硕士生, 研究方向为智能计算、组合优化。E-mail: zhuanghl1998@163.com

通讯作者: 夏小云(1982-), 男, 教授, 博士, 研究方向为智能计算、调度优化。E-mail: xi Xiaoyun@zjxu.edu.cn

0 引言

化石燃料燃烧产生的温室气体是造成气候变化与全球变暖的主要原因^[1]。交通运输产业是全球第二大碳排放源, 减碳降耗是当前城市交通策略的主要目标之一^[2]。近十余年来, 电动汽车技术快速发展, 受到了越来越多的关注。国际能源组织分析了多个国家的电网, 认为使用电动汽车能够有效减少全球碳排放^[3]。研究发展电动汽车也是我国一个长远的、意义重大的战略目标^[4]。

电动汽车送货是物流公司的新趋势^[5]。由于充电站点少、续航里程较短等特性, 传统车辆路径问题(vehicle routing problem, VRP)^[6]被扩展为电动车路径问题(electric VRP, EVRP)。VRP描述了如何使用一组有限数量的货车以最小的代价将给定的货物全部运输到客户手中去的问题。城市加油站设施完善, 且燃油汽车续航里程充足, VRPs通常不考虑中途加油的代价。电动汽车路径问题源于Erdoğan等提出的绿色车辆问题(GVRP)^[7]。电动汽车仅靠电池续航往往无法完成完整的一趟送货, 中途可能需要充电是EVRPs与VRPs的主要区别。

EVRP虽然是VRP的直接变体, 但由于充电约束的存在, VRPs的求解方法通常不能直接用于求解EVRPs^[8]。EVRP相比VRP复杂得多, 其发展具有明确的理论和现实意义, 故本文将EVRP及其变体的模型、求解方法和应用场景作一概述。

1 电动车路径问题模型

1.1 绿色车辆路径问题

GVRP的提出背景为用清洁能源替代化石燃料, 而非仅仅针对电能^[7], 但其已具备电动车路径问题的雏形, 可认为是不考虑车辆容量(最大载重)的EVRP^[9], 故本文在描述GVRP时仍采用“电动车”“充电站”“耗电率”“电量”等词。

GVRP定义在无向完全图 $G=(V,E)$ 上。 $V=\{v_0=0\}\cup I\cup F=\{v_0, v_1, \dots, v_{n+s}\}$, 其中, v_0 为仓库; $I=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为客户点集; $F=\{v_{n+1}, v_{n+2}, \dots, v_{n+s}\}$ 为充电站点集。 $E=\{(v_i, v_j): v_i, v_j \in V, i < j\}$ 为边集, 边 (v_i, v_j) 对应一个非负距离 d_{ij} 。GVRP的目标为使用 m 辆电池容量为 Q 、单位距离耗电量为 r 的电动车配送货物给每一个客户, 使总路程最小。GVRP符合如下条件: ①车辆离开充电站时满电; ②每个客户有且仅有被服务1次; ③仓库可视为充电站; ④充电站可被访问任意次; ⑤车辆行驶中电量不能耗尽。图1给出了基本EVRP的一个例子。

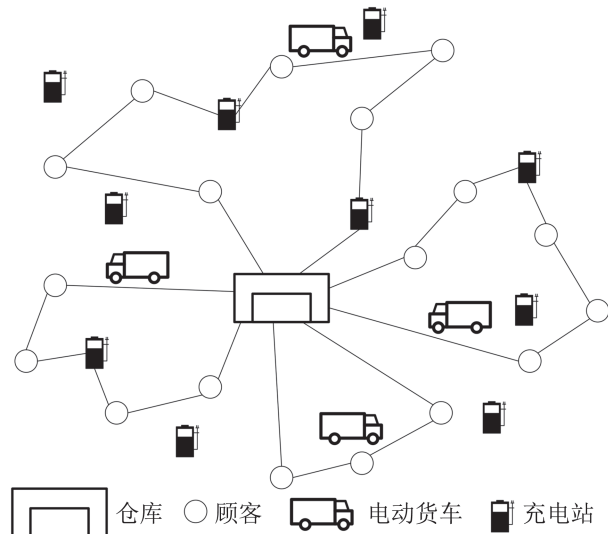


图1 基本EVRP解例
Fig. 1 Solution of EVRP

充电站可被访问任意次, Erdoğan等引入了Bard等提出的虚拟节点技术^[10]。定义虚拟充电站点集 $\Phi=\{v_{n+s+1}, v_{n+s+2}, \dots, v_{n+s+s'}\}$, 其中, 每个元素对应1个充电站点。 G 被扩展为 $G'=(V',E')$, 其中, $V'=V\cup\Phi$ 。定义模型所需的补充符号有 $I_0=\{v_0\}\cup I$, $F'=F\cup\Phi$, $F_0=\{v_0\}\cup F'$ 。决策变量: ①二进制数 x_{ij} , 值为1表示有车辆经过边 (i,j) , 为0表示无车辆经过边 (i,j) ; ②车辆在节点 j 时的剩余电量 y_j 。基本GVRP的数学模型如下。

(1) 目标

总路程最小化:

$$\min \sum_{i,j \in V', i \neq j} d_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

(2) 约束条件

确保每一个客户都有唯一后继:

$$\sum_{j \in V', j \neq i} x_{ij} = 1, \forall i \in I \quad (2)$$

确保充电站点(包括虚拟充电站点)最多有一个后继:

$$\sum_{j \in V', j \neq i} x_{ij} \leq 1, \forall i \in F_0 \quad (3)$$

确保任意节点的出入度相等:

$$\sum_{i \in V', j \neq i} x_{ji} - \sum_{i \in V', j \neq i} x_{ij} = 0, \forall j \in V' \quad (4)$$

限制最大车辆数为 m :

$$\sum_{j \in V' \setminus \{0\}} x_{0j} \leq m \quad (5)$$

车辆行驶过程中不断消耗电量:

$$y_j \leq y_i - r \cdot d_{ij} x_{ij} + Q(1 - x_{ij}), \forall j \in I, \forall i \in V', i \neq j \quad (6)$$

车辆离开充电站时满电:

$$y_j = Q, \forall j \in F_0 \quad (7)$$

确保在任何位置都有足够的电量返回仓库或通过某个充电点返回仓库:

$$y_j \geq \min \{rd_{j0}, r(d_{jl} + d_{l0})\}, \forall j \in I, \forall l \in F' \quad (8)$$

确保二进制完整性:

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i, j \in V', i \neq j \quad (9)$$

为符合实际场景的需要, GVRP 出现了一些变体, 如变速省油绿色车辆路径问题(fuel efficient GVRP with varying speed, FGVRPVS)^[11]、带时间窗的绿色异构车辆路径问题(heterogeneous fleet GVRP with time windows, HFGVRPTW)^[12]和考虑动态拥堵的多车型绿色车辆路径问题(multi-vehicle GVRP considering dynamic congestion, MGVRPDC)^[13]等。这些变体与后续发展产生的 EVRP 的变体有重合或类似, 本文不对这些变体详细描述, 重点放于 EVRPs 上。

1.2 电动车路径问题

随着电动车技术的发展, EVRP 逐渐成为了该领域的主流研究方向, 并演化出各种变体^[14]。

(1) 基本电动车路径问题

基本 EVRP 是 VRP 的直接扩展, 相比 GRVP 增加了容量(载重)约束^[8,14-16]。在基本 GVRP 模型的基础上, 添加客户 $v_i \in I$ 对应的货物质量 b_i 和车辆容量 C ; 新增决策变量: 车辆到达节点 i 时的载重 u_i 。补充如下约束。

车辆配送过程中载重逐渐降低:

$$u_j \leq u_i - b_i x_{ij} + C(1 - x_{ij}), \forall i \in V', \forall j \in V', i \neq j \quad (10)$$

保证车辆不超过车辆容量:

$$0 \leq u_i \leq C, \forall i \in V' \quad (11)$$

基本 EVRP 不考虑客户的等待时间、车辆充电时间、车辆充电程度、车辆属性等现实存在的情况, 后续发展出了多种更加贴近实际的变体。

(2) 带时间窗的电动车路径问题

实际物流配送中, 考虑到客户的体验感, 需保证客户在一定时间范围内收到货物, 提出带时间窗的电动车路径问题(EVRPTW)^[17-21]。在 EVRPTW 中, 客户 $i \in I \cup \{0\}$ 关联一个时间窗 $[e_i, l_i]$, l_0 为路线的最大持续时间, 其他时间窗规定了客户收到货物的时间范围。已知每条边 (v_i, v_j) 的行驶耗时为 t_{ij} 。新增决策变量: 车辆到达节点 i 的时间 τ_i 。EVRPTW 的目标是使每个客户在他们各自的时间窗内收到货物, 即要求符合式(12)。

$$e_i \leq \tau_i \leq l_i, \forall i \in I \cup \{0\} \quad (12)$$

除了 t_{ij} , τ_i 具体的计算还受客户的服务时间、车辆充电时间、充电策略等影响, 其计算式由具体问题决定。

普通 EVRPTW 严格限制了各个客户接受到服务的时间区间, 即硬时间窗。但这种严格限制与实际情况存在偏差, 带软时间窗的电动车路径问题(EVRPSTW)解决了这一问题, 其允许违反时间窗服务顾客, 但会对该行为给予惩罚^[22]。

(3) 非线性充电的电动车路径问题

非线性充电的电动车路径问题(EVRP with nonlinear charging function, EVRPNL)考虑了车辆的充电耗时, 其优化目标不再是简单的总路程, 而是路程与耗时等多目标^[23-24]。

经典充电函数如图2所示。

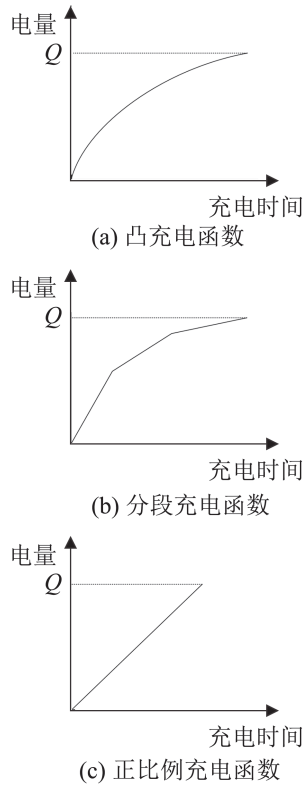


图2 经典充电函数

Fig. 2 Classical charging functions

根据电池的特性, 学者们为EVRPNL设计的充电函数通常为电池电量随充电进程减速增长直至满电的凸函数, 即当电量低时, 充电速度快, 而电量较高时, 充电速度会趋慢, 如图2(a)所示; 为简化函数, 也可以使用分段函数(折点)拟合的凸函数作为充电函数, 如图2(b)所示; 当充电函数为正比例函数(满电前)时, 该问题退化为线性充电的电动车路径问题, 如图2(c)所示。

(4) 部分充电的电动车路径问题

基本EVRP强制车辆在充电站充满电后再离开, 对于考虑充电代价的场景, 可以通过部分(不

完全)充电的方式进一步降低目标函数值, 由此引出了部分充电的电动车路径问题(EVRP with partial recharges, EVRPPR)^[20,23,25]。

EVRPPR允许车辆在不违反电量约束的情况下自主选择充电程度, 但该机制的引入也使得EVRPPR的求解难度相比EVRP大大提高。

(5) 异构电动车路径问题

基本EVRP默认 m 辆车同质, 即电池容量和车辆容量均为 Q 和 C , 异构电动车路径问题(EVRP with heterogeneous fleet, EVRPHF)扩展了该描述, 为车辆 i 独立定义电池容量 Q_i 、车辆载重 C_i 以及其他需要的属性^[26]。相比EVRP, EVRPHF在车队组成方面更加灵活。

(6) 带回程取货的电动车路径问题

为提高效率, 一些物流公司将从仓库送货给客户与从客户手中收取寄件回仓库2个任务合并, 由此引出了带回程取货的车辆路径问题(VRP with backhauls, VRPB)。在VRPB中, 客户被划分为取件客户与寄件客户, 车辆在经过取件客户时载重减少相应货件的质量, 反之, 增加寄件客户相应货件的质量。带回程取货的电动车路径问题(EVRP with backhauls, EVRPB)^[27]在其基础上添加了电动车相关的约束。

(7) 混合车型的电动车路径问题

由于电动车技术和相应基础设施仍处在发展阶段, 混合车型的电动车路径问题也受到学者关注。混合车型的电动车路径问题分为2种: ①同时调度电动车与燃油车的车辆路径问题(mixed EVRP, MEVRP)^[26,28]; ②使用油电混合动力的电动车路径问题(hybrid EVRP, HEVRP)。

电动车的能源成本较低, 但需要耗费一定的充电时间, 而燃油车能源成本高, 但加油时间可忽略不计。MEVRP旨在同时调度2种车型使得与能源成本和时间相关的目标值降至最低, 是比较符合当前实际的模型。

HEVRP中使用的车辆为电能燃油双动力车

辆, Mancini 假设车辆在电能耗尽后立即切换为燃油模式^[29]。

(8) 电动车选址路径问题

当前电动车配套基础设置还不完善, 而一般 EVRPs 是建立在充电站已经全部建成前提下的。电动车选址路径问题 (electric vehicle location-

routing problem, EVLRP)^[30-34] 将选址问题引进 EVRP, 要求算法在求解路径问题的同时给出充电站选址方案, 符合实际需求。选址一般由算法生成或在给定的候选位置中选择。

综上, 电动车辆路径问题的主要模型发展与关系如图 3 所示。

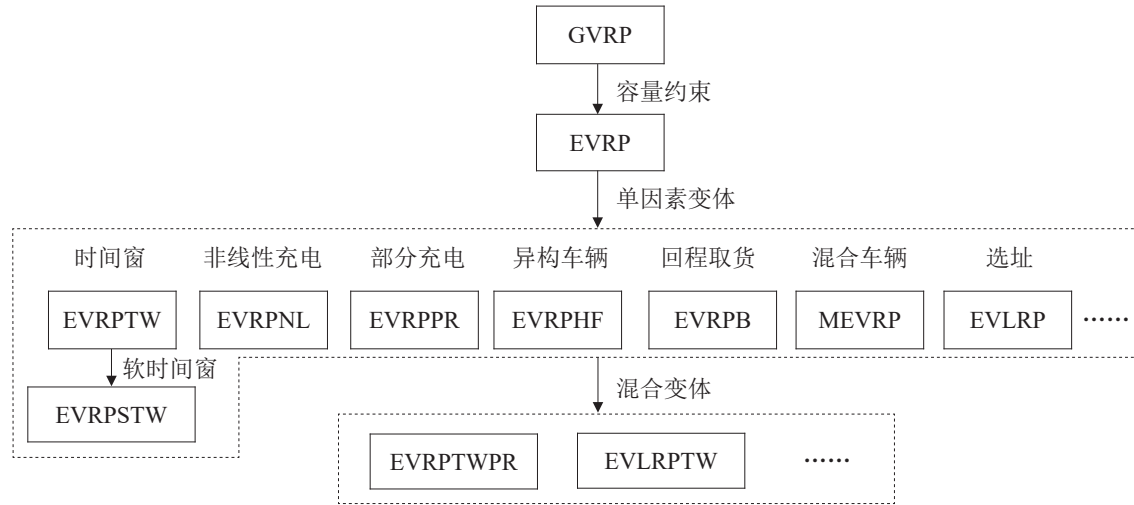


图3 EVRP模型分类

Fig. 3 EVRP classes

本文在描述时根据单个因素划分变体, 但许多研究往往不止关注一个因素, 而是综合考虑多个因素。此外, 不同学者研究的同一类型的变体也可能存在细节差异, 这种差异会体现在数据集的字段中。

1.3 优化目标

(1) 路程最短

以车辆的行驶总路程最短为目标是最简单的方案^[7-8,14-15,17], 通常在简单模型或有模型简化需求时使用。

(2) 时间最短

对于考虑了行驶时间和充电时间等因素的模型, 往往会选择最小化时间成本方案^[23-24,35]。该方案通常包含了尽量减少路程的需求, 因为行驶时间往往是优化目标的一部分。不过也有学者单独以总充电时间作为优化目标^[20]。

(3) 自定义成本

将其他因素作为优化目标, 以更符合实际需求, 如车辆成本、电能成本和时间窗惩罚成本(客户不满意度)等^[17-18]。对于EVRPSTW及其混合变体, 时间窗惩罚成本是一个重要优化目标。

总体来讲, EVRPs的优化目标可以很简单, 也可以很复杂, 需要针对具体模型、实际需求和算法性能进行合适的设置。

2 基准数据集

2.1 EVRP基准数据集

无论变体如何发展, 基本EVRP的求解是该系列问题的关键。本节介绍由Christofides等提出的带容量约束的车辆路径问题(capacitated VRP, CVRP)基准数据集^[36]扩展的EVRP基准数据集^[15]。

EVRP基准数据集分为小规模算例集和大规模算例集两部分, 基本信息分别如表1~2所示。

表1 EVRP基准小规模算例集信息

Table 1 Details of small-scale EVRP benchmark instances

算例	客户数	充电站数	电池容量	车辆容量
E22	21	8	94	6 000
E23	22	9	190	4 500
E30	29	6	178	4 500
E33	32	6	209	8 000
E51	50	9	105	160
E76	75	9	98	220
E101	100	9	103	200

表2 EVRP基准大规模算例集信息

Table 2 Details of large-scale EVRP benchmark instances

算例	客户数	充电站数	电池容量	车辆容量
X143	142	4	2 243	1 190
X214	213	9	987	944
X351	350	35	649	436
X459	458	20	929	1 106
X573	572	6	1 691	210
X685	684	25	911	408
X749	748	30	790	396
X819	818	25	926	358
X916	915	9	1 591	33
X1001	1 000	9	1 684	131

算例的维度为客户数加1(仓库)。小规模算例以“E维度”命名,大规模算例以“X维度”命名。从客户数量看,该数据集涵盖了大部分场景。

该数据集所用的数学模型与式(1)~(11)一致,除了表1~2的信息,还给出了每个节点的二维欧几里得空间坐标与车辆的耗电率,其中,小、大规模算例的耗电率分别是1.2和1。需要一提的是,虽然EVRP基准数据集中保留了车辆数这一信息,但对于基本EVRP不起作用,因为仓库也视为充电站,并且目标函数不考虑时间,所以,无论解中有多少条路线,都可以视为由一辆车完成。

为对该数据集有一个更清晰的认识,绘制其节点空间分布图,如图4~5所示,其中,红色正方形表示仓库、绿色三角形表示充电站、蓝色圆形表示客户节点。

从图4~5中可以更清晰地看出各算例间的分布差异。EVRP基准测试集包含了各种分布情况,有客户均匀分布在仓库周围的,也有客户集中在仓库的某一个或几个方向的,且集中情况也各有不同,能对算法性能进行综合的测试。

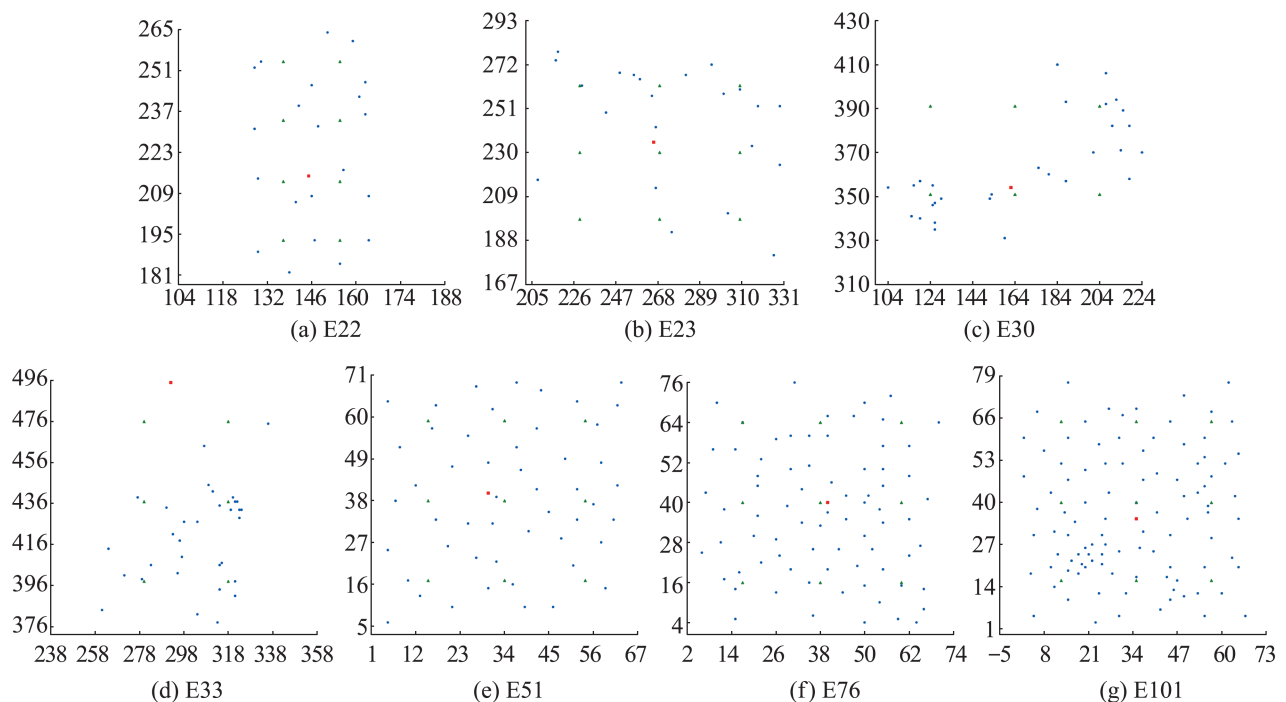


图4 EVRP基准小规模算例节点分布图

Fig. 4 Nodes distribution of small-scale EVRP benchmark instances

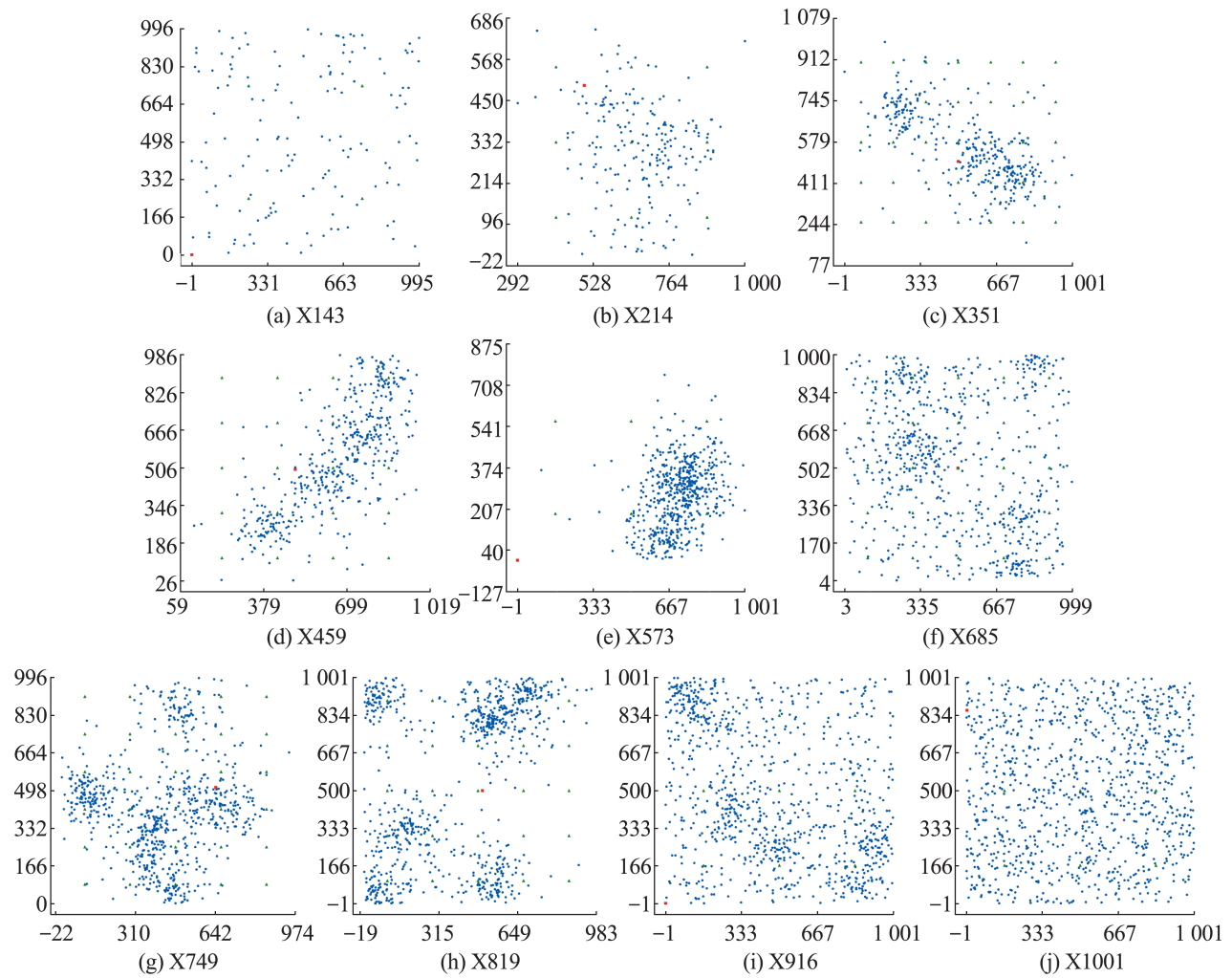


图 5 EVRP 基准大规模算例节点分布图

Fig. 5 Nodes distribution of large-scale EVRP benchmark instances

2.2 EVRPTW 基准数据集

EVRPTW 基准数据集由 Solomon 数据集^[37]扩展得到, 也使用二维欧几里得空间坐标。该数据集无车辆数限制, 除了基本 EVRP 的信息, 还添加了电动车充电速度、车速和每个节点的时间窗。其中, 所有算例电动车充电速度和车速都是 1; 仓库和充电点的时间窗开始时间都为 0, 时间窗结束时间为给定的最大结束时间, 客户节点的时间窗单独设置。

该数据集的算例数较多, 本文不再列表展示其基本信息。此外, 许多算例使用相同的节点分布, 仅在电池容量、车辆容量和充电速度等车辆属性上所有变动, 故本文仅挑选部分算例进行节点分布展示, 如图 6 所示。其中, 红色正方形表

示仓库、绿色三角形表示充电站、蓝色圆形表示客户节点。该数据集以在仓库相同的位置设置一个充电站的方式来实现仓库可视为充电站这一要求。

总体来看, EVRPTW 基准算例的客户节点大多是均匀散布在仓库四周, 没有在节点分布上过多干扰算法的判断, 偏向于测试算法在不同车辆属性下的表现。

3 EVRPs 的求解方法

CVRP 本身属于 NP-hard 问题, 其求解已十分具有挑战性。而 EVRP 作为 CVRP 的扩展, 求解难度更是上了一个台阶。正因如此, 相比新的扩展

模型的提出, EVRPs的求解研究相对较少, 亟待更进一步的研究。目前, 用于求解EVRPs的方法

主要有数学软件法、精确算法、启发式算法, 以及机器学习算法。

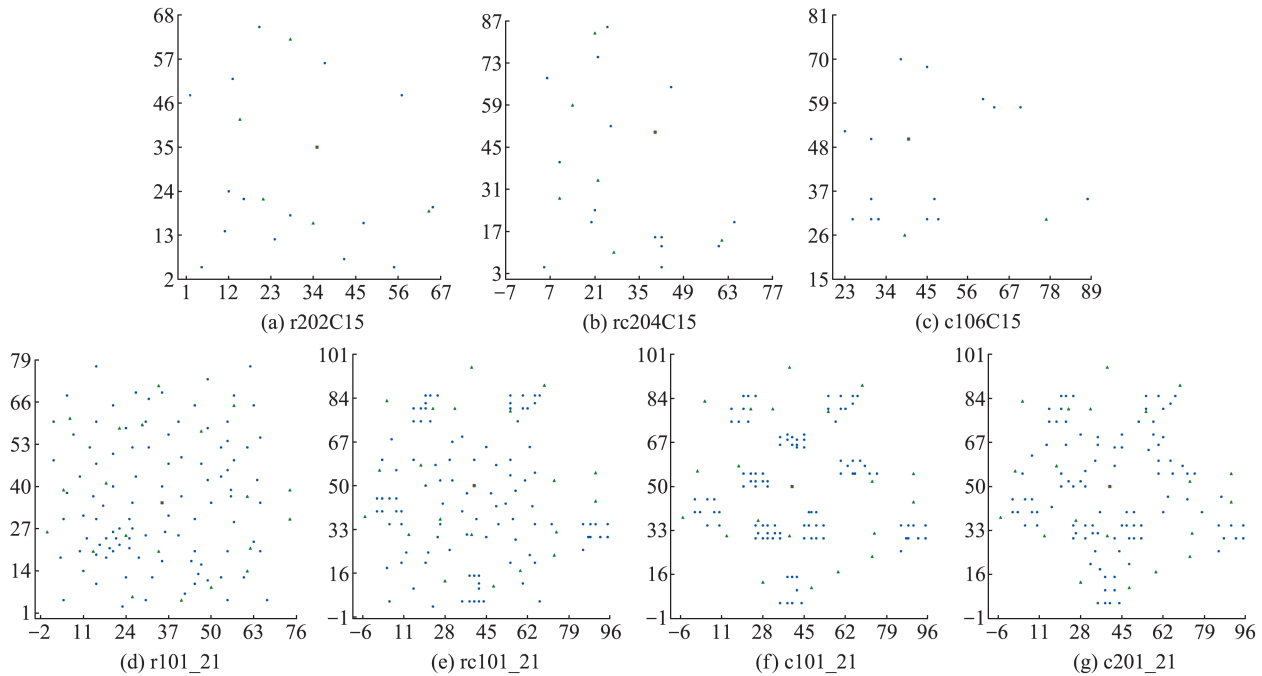


图6 EVRPTW基准数据集部分算例节点分布图

Fig. 6 Node distributions of some EVRPTW benchmark instances

3.1 数学软件法

数学软件是求解EVRP容易实现的方法, 只需建立问题对应的整数线性规划模型(mixed integer linear program, MILP), 再直接使用数学软件求解即可。

Zuo等^[26]对EVRP进行了MILP的模型描述, 并使用数学软件AMPL/CPLEX求解。但其实验较为简单, 所用算例仅为其改编的一个维度为21的算例, 初步验证了使用数学软件求解EVRP的可行性。

Keskin等^[38-39]通过CPLEX结合自适应大规模邻域搜索算法(adaptive large neighborhood search, ALNS)的方式求解了EVRPSTW。其目标函数综合考虑了时间、耗电和客户满意度(迟到惩罚)等。为求解更大规模的算例, 他们使用ALNS搜索邻域, 再通过CPLEX优化获得的路线。对于ALNS获得的路线, 通过充电策略进一步增强。实验结果表明: 对于小规模算例, 其所提算法在求解质

量和时间上均优于CPLEX。

虽然使用数学软件求解容易实现, 但有效性仅限于小规模算例。软件算法的通用性较强, 主要是运筹学算法和一些启发式策略, 由软件设计者控制, 难以人为地对其进行灵活的调整。随着问题维度的增加, 该方法求解时间过长, 不可接受。在求解大规模算例时, 需要结合其他算法。许多文献将纯软件求解的结果作为标准, 以对比其提出的算法, 在此层面上来看, 该方法仍具有研究意义。

3.2 精确算法

精确算法主要为运筹学方法, 包括单纯形法、列生成法、分支定界法、分支剪枝法和分支定价法等。其中, 分支定价法是求解EVRPs的主要精确算法, 由分支定界法和列生成法组成, 原理较为复杂, 本文不再解释。

Ceselli等^[40]提出了一种依赖路径编码的分支定价法, 用于求解多充电技术的电动车路径问题。

在其编码中，算法生成的每一列代表 2 个充电站之间的客户访问顺序，大规模分解和定价能够并行进行计算。通过实验测试，该算法在可接受时间(3 h)内最大能够求解 30 个客户、9 个充电站、5 辆车、3 种充电技术的算例。虽然与启发式算法差距很大，但考虑到 EVRPs 的求解难度，该方法已在精确算法上有所创新与进步。

揭婉晨等^[41]为加速分支定价法对带时间窗的多车型电动车路径问题的求解，提出生成下界值的方法对车辆类型进行预处理操作，并制定了生成整数解上界的策略来压缩解空间。实验验证了所提策略的可行性与有效性。

Wu 等^[42]为求解燃油电动两级配送的电动车路径问题，用分支定价法求解第一级，并设计了一种双向标记算法在第二级生成可行解，通过在小规模数据集中与 CPLEX 的对比验证了该算法的有效性。此外，他们还探讨了充电站密度、电池容量和车辆成本对问题求解结果的影响。但其探讨时仅挑选了其中 5 个维度为 21 的算例，其结果似乎太过局限。

Lee^[43]在求解 EVRPNL 时考虑电动车充电的耗时成本，构建了一个扩展的充电站网络，在该网络设计了一种分支定价法，使用了一个新的列生成(column generation, CG)框架，给出了该算法在多个中小规模算例上的求解结果，其中，最大维度为 37。这些算例均可在 1 小时内完成求解，证实了该方法的有效性。

Duman 等^[44]提出了一种增强分支定价法来求解 EVRPTW，使用标签校正算法实现了列生成方法和定价子问题，并采用了一系列加速优化策略。在实验数据集上与启发式算法对比，该精确算法仍需要消耗大量额外的计算时间，而得到的解的质量差距小于 1%。

虽然数学软件中通常也包含了各种精确算法，但策略以通用性为主，面对具体问题时，自定义的精确算法往往更加适应问题的需求，这也是 EVRPs 中研究精确算法的主要意义。计算时间与空间消耗过大是精确算法难以回避的问题，虽然

精确算法相比数学软件法有更高的设计灵活性，但仍不适合大规模算例的求解。

3.3 启发式算法

启发式算法通常在高层描述了探索解空间的方式，目标是在可接受时间内搜索到尽量优的解。个体按照策略搜索解空间，一些算法还具有种群行为。该方式虽然放弃了寻找最优解，但带来了极大的效率优势，具有通用性、高效性等特点，是目前求解 EVRPs 的主流算法。

EVRPs 的算法之间具有一定的互通性，而其中基本 EVRP 的求解最为关键。2020 年，IEEE 计算智能学会开展了一项基本 EVRP 的求解竞赛^[15]。在该竞赛中，变邻域搜索算法(VNS)、模拟退火算法(SA)和遗传算法(GA)获得了前 3 名，但未给出具体算法细节。

Deng 等^[45]提出一种结合几种启发式算法的改进差分进化混合算法(improved differential evolution algorithm, IDE)来求解带时间窗的非线性充电电动车路径问题(EVRPTWNL)。提出了一种考虑充电站特征的特殊编码，使用了一种充电调整策略以减少充电时间。应用了一种修复策略以确保解是可行的。与其他算法的对比实验中，IDE 搜索到了更多的更优解，验证了其性能的先进性。

吴廷映等^[46]设计了改进的自适应大邻域搜索求解算法，考虑载重影响耗电率的电动车路径问题。设计了多种基于模型特性的破坏算子和修复算子，并引入了禁忌搜索算法的思想。该算法在小规模算例上与 CPLEX 相比具有效率优势，并且在大规模算例也能稳定运行。

Zhu 等^[47]将精英遗传算法(elitist GA, EGA)应用于 EVRPTW。在初始化时，他们提出了一种方向自适应邻域路由初始化算法。该邻域路由法能使路由在合适的客户开始，并选择最近的客户作为下一个要调度的路由。个体邻域路由的性质在遗传算法的选择、交叉和变异算子中可以继承。为使算法更快收敛，使用了一种新的自适应交叉

与变异概率。由于数据集中的充电站点是作者自己添加的, 没有将 EGA 与其他算法进行直接对比。此外, 作者称该方法在美国邮政投递服务的仿真上成功进行了演示, 但实际上只是利用谷歌地图提供的坐标进行实验, 其中, 只有一个充电站, 且时间窗限制非常宽松。综合来看, 该方法相比其他启发式算法, 性能还有待研究。

王琪瑛等^[22]提出了一种结合变邻域搜索算法的 PSO 来求解带软时间窗的电动车换电站选址路径问题, 在算法中引入了门槛接受法以增强搜索的随机性。与 CPLEX 的对比实验中, 该算法在大多数情况下能搜索到与 CPLEX 相同或相近的解, 但计算时间显著优于 CPLEX, 验证了该算法的正确性与可行性。

Mavrovouniotis 等^[48]将蚁群优化算法(ACO)应用于 EVRP。为符合电量约束, 在每个操作步骤前都会评估车辆的电量水平。不同场景下的实验结果表明, 该算法能够快速生成可行解, 但求解质量没有进行过多分析与比较。

张佳蕊^[49]在研究 MEVRP 时改进了 PSO。应用佳点集理论产生初始种群, 增加 PSO 的多样性, 在迭代过程中, 增加局部搜索策略, 避免 PSO 陷入局部最优。实验结果表明, 改进 PSO 相比基本 PSO 能够有效减少总成本。

Cheng 等^[50]提出了一种增强人工蜂群算法(enhanced artificial bee colony, EABC)来求解 EVRP。根据 EVRP 的特点设计了3个高效邻域搜索算子, 并提出了一种路线消除方法以减少生成的解的车辆使用数。通过与 CPLEX 的求解对比, 验证了所提算法的高效性, 但该算法依赖于参数的合理设置。

张惠珍等^[51]提出了一种两阶段算法求解多车场多车型电动车路径问题。第一阶段使用 K-means 算法对客户进行分组, 第二阶段使用改进 ACO 为已分组客户规划 TSP 路线。但该工作仅与传统 ACO 进行了对比实验, 算法整体的有效性有待进一步研究。

Wang 等^[52]提出使用禁忌搜索算法(tabu search, TS)求解 EVRP。相比数学软件使用 CPLEX 求解, 该算法能快速求得质量相当的解。但实验所用数据集仅为2个维度分别为21和31的算例, 无法从中验证所提算法的综合性能。

Karakatić^[53]提出了一种两层遗传算法(two-layer GA, TLGA)来求解带时间窗的部分非线性充电的电动车路径问题。优化目标为在考虑非线性充电的情况下最大限度地减少行驶时间、充电次数和充电时间。TLGA 使用了两层解(基因)个体, 应用了多个交叉算子, 可以有效解决路线生成和充电计划问题。

Jia 等^[8]设计了一种双层蚁群优化算法(bi-level ACO, BACO)来求解基本 EVRP。将 EVRP 分解为 CVRP 和客户路线充电问题(fixed route vehicle charging problem, FRVCP)两个子问题, 以缩小搜索空间。提出了一种顺序优先的最大最小蚁群算法和一种启发式移除算法, 分别用于求解 CVRP 和 FRVCP。BACO 在 EVRP 基准数据集上取得了较好的结果。与 VNS、SA 和 GA 相比, BACO 的总体性能在大部分算例上更好, 且更新了其中7个算例的最优解。在此基础上, 提出了一种基于置信度的双层蚁群算法(confidence-based ACO, CBACO)^[16]。在两个子问题间加入了一种基于置信度的选择方法, 以选择有改进前景的客户服务顺序解进行深层搜索。此外, 还提出了一种新的枚举启发式算法来生成充电时间表。CBACO 更新了8个算例的最优解, 是目前基本 EVRP 最先进的算法。

相比数学软件法和精确算法, 启发式算法在大规模算例上有显著的性能优势; 在中小规模算例上, 部分高性能的启发式算法也能搜索到与前二者质量相当的解。启发式算法具有较高的设计灵活性, 但目前大规模 EVRPs 的相关研究还相对有限, 仍是该领域研究的关键方向。

3.4 强化学习算法

强化学习算法在连续决策问题, 尤其是游戏

中,取得了先进的效果,其主要思想是让智能体通过环境奖励学习到各种状态下的行为策略。随着机器学习的发展,一些学者尝试使用机器学习方法求解EVRPs。

胡尚民等^[54]尝试基于强化学习求解EVRP。他们假设任意车辆路线(从仓库出发到返回)中最多经过一个充电站,用给定的分布生成训练数据,通过策略梯度法训练模型,并保证在训练过程中路径合法。其假设大大降低了EVRP的求解难度,在小规模算例上或许有效,但对于中大规模的算例,与实际情况却有所差距。事实上他们也仅使用了一组维度为21的算例进行实验,所提方法的有效性有待商榷。

Lin等^[19]开发了一个用于解决EVRPTW的深度强化学习框架。虽然该框架在求解质量上所有欠缺,但其在扩展性、实时性方面具有优势。

当前的强化学习方法并不是非常适合求解EVRP等复杂的组合优化问题,相关的研究较少,但也有成功的案例。实际上,将EVRPs看成连续决策问题是具有可行性的,但目前来看,想真正训练出一个能够求解较大规模EVRPs的智能体是非常困难的,还需要进行更多的研究。强化学习方法在训练完成后的求解速度相比启发式算法具有优势,在有实时性需求的场景可能有突破性作用。

3.5 各方法总结

EVRPs的发展研究现状如表3所示。

EVRPs解决技术目前主要有数学软件法、精确算法、启发式算法和机器学习方法。它们的简要对比分析情况如表4所示。

数学软件法和精确算法的性能无法达到使用需求,但仍具有研究意义。启发式算法是当前EVRPs的主要解决方法,具有设计灵活性高、效率高等优点。目前,机器学习算法在EVRPs上的应用较少,性能一般,但训练完成后求解速度快,具有良好的发展前景。由于各物流企业还未大规模地使用电动车,EVRPs的实际应用还较少。但研究表明,当前的理论模型和算法已具备一定的现实可行性。

3.6 EVRP基准数据集的求解发展对比分析

EVRP的求解难度极大,即便是其子问题也是NP-hard问题。这使得在EVRPs的求解算法上的创新与突破相当困难。大部分学者转而关注EVRP变体的提出与发展,并在其各自提出的变体上提出相应的算法,大部分通过与CPLEX或精确算法对比验证其有效性。其结果就是先进算法之间无法形成横向对比,即便是极具代表性的EVRP基准数据集,目前也只有5个算法进行了应用。应用的算法均为启发式算法。

VNS、SA和GA为IEEE计算智能会议开展的基本EVRP的求解竞赛的前3名,BACO和CBACO为后续提出的算法。它们的求解结果如表5~6所示。

表3 EVRPs模型求解方法及优化目标
Table 3 A review on the EVRPs

文献	模型	求解方法	优化目标
[7]	GVRP	混合启发式算法	距离最短
[26]	EVRP	AMPL/CPLEX	距离最短
[38]	EVRPTW	ALNS	耗电最少
[39]	EVRPTW	CPLEX,ALNS	成本最小 (运输、车辆、司机和时间窗惩罚成本)
[40]	多充电技术的电动车路径问题	分支定价法	自定义总充电代价最小
[41]	多车型电动车辆问题	分支定价法	成本最小(运输和车辆成本)
[42]	MEVRP	分支定价法,双向标记算法	成本最小(运输和车辆成本)

续表

文献	模型	求解方法	优化目标
[43]	EVRPNL	分支定价法	时间最短
[44]	EVRPTW	分支定价法	距离最短
[15]	EVRP	VNS, SA, GA	距离最短
[45]	EVRPTWNL	改进差分进化混合算法	成本最小(运输和时间窗惩罚成本)
[46]	考虑载重影响耗电率的电动车路径问题	改进自适应大邻域搜索	成本最小(运输、充电和车辆成本)
[47]	EVRPTW	精英遗传算法	耗电最少
[22]	EVRPSTW	结合变邻域搜索算法的粒子群优化算法	成本最小
[48]	EVRP	蚁群优化算法	时间最短
[49]	MEVRP	改进粒子群优化算法	成本最小 (运输、碳排放和时间窗惩罚成本)
[50]	EVRP	增强人工蜂群算法	距离最短
[51]	多车场多车型的电动车路径问题	K-means, 改进蚁群算法	成本最小(运输、车辆和电池成本)
[52]	EVRP	禁忌搜索算法	距离最短
[53]	EVRPTWNL	两层遗传算法	时间最短
[8]	EVRP	双层蚁群优化算法	距离最短
[16]	EVRP	基于置信度的双层蚁群算法	距离最短
[54]	EVRP	强化学习	距离最短
[19]	EVRPTW	深度强化学习	距离最短

表4 求解方法比较

Table 4 Comparison of solving approaches

方法类型	难易程度	灵活性	性能	使用情况
数学软件	容易	低	限小规模算例	较少
精确算法	较容易	中	限小规模算例	较少
启发式算法	较困难	高	可搜索到小规模算例的最优解、大规模算例的优质解	当前主流
机器学习算法	困难	中	训练完成后求解速度快, 求解质量一般	有发展前景

表5 5种算法在EVRP基准数据集小规模算例上的求解结果

Table 5 Search results of VNS, SA, GA, BACO and CBACO on small-scale EVRP benchmark instances

算例	统计	VNS	SA	GA	BACO	CBACO
E22	min	384.67	384.67	384.67	384.67	384.67
	max	384.67	384.67	384.67	\	\
	mean	384.67	384.67	384.67	384.67	384.67
	stdev	0	0	0	0	0
E23	min	571.94	571.94	571.94	571.94	571.94
	max	571.94	571.94	571.94	\	\
	mean	571.94	571.94	571.94	571.94	571.94
	stdev	0	0	0	0	0
E30	min	509.47	509.47	509.47	509.47	509.47
	max	509.47	509.47	509.47	\	\
	mean	509.47	509.47	509.47	509.47	509.47
	stdev	0	0	0	0	0

<http://www.china-simulation.com>

• 331 •

续表

算例	统计	VNS	SA	GA	BACO	CBACO
E33	min	840.14	840.57	844.25	840.57	840.57
	max	840.46	873.33	846.21	\	\
	mean	840.43	854.07	845.62	842.30	840.57
	stdev	1.18	12.80	0.92	1.42	0.00
E51	min	529.90	533.66	529.90	529.90	529.90
	max	548.98	533.66	553.23	\	\
	mean	543.26	533.66	542.08	529.90	529.90
	stdev	3.52	0	8.57	0	0
E76	min	692.64	701.03	697.27	692.64	692.64
	max	707.49	716.77	730.92	\	\
	mean	697.89	712.17	717.30	692.85	692.88
	stdev	3.09	5.78	9.58	0.81	0.92
E101	min	839.29	845.84	852.69	840.25	838.84
	max	\	856.74	887.14	\	\
	mean	\	852.48	872.69	845.95	840.56
	stdev	\	3.44	9.58	4.58	0.42

注：“\”表示数据未给出或有误。

表 6 5 种算法在 EVRP 基准数据集大规模算例上的求解结果

Table 6 Search results of VNS, SA, GA, BACO and CBACO on large-scale EVRP benchmark instances

算例	统计	VNS	SA	GA	BACO	CBACO
X143	min	16 028.05	16 610.37	16 488.60	15 901.23	15 884.58
	max	16 883.38	17 396.06	17 478.86	\	\
	mean	16 459.31	17 188.90	16 911.50	16 031.46	15 930.76
	stdev	242.59	170.44	282.30	262.47	31.15
X214	min	11 323.56	11 404.44	11 762.07	11 133.14	11 091.37
	max	11 660.70	11 881.73	12 309.38	\	\
	mean	11 482.20	11 680.35	12 007.06	11 219.70	11 245.18
	stdev	76.14	116.47	156.69	46.25	66.09
X351	min	27 064.88	27 222.96	28 008.09	26 478.34	26 456.95
	max	27 418.38	27 796.69	28 792.66	\	\
	mean	27 217.77	27 498.03	28 336.07	26 593.18	26 637.80
	stdev	86.20	155.62	205.29	72.86	91.24
X459	min	25 370.80	25 464.84	26 048.21	24 763.93	24 776.44
	max	25 774.62	26 038.65	26 742.11	\	\
	mean	25 582.27	25 809.47	26 345.12	24 916.60	24 911.98
	stdev	106.89	157.97	185.14	94.08	92.95
X573	min	\	51 929.24	54 189.62	53 822.87	52 706.59
	max	\	53 534.01	56 327.62	\	\
	mean	\	52 793.66	55 327.62	54 567.15	52 853.78
	stdev	\	577.24	548.05	231.05	53.12

续表

算例	统计	VNS	SA	GA	BACO	CBACO
X685	min	71 345.40	72 549.90	73 925.56	70 834.88	70 943.23
	max	72 187.75	73 693.49	75 535.99	\	\
	mean	71 770.57	73 124.98	74 508.03	71 440.57	71 339.17
	stdev	197.08	320.07	409.43	281.78	297.11
X749	min	81 002.01	81 392.78	84 034.73	80 299.76	80 042.38
	max	81 634.06	82 414.80	85 549.36	\	\
	mean	813 270.39	81 848.13	84 759.79	80 694.54	80 571.38
	stdev	176.19	275.26	376.10	223.91	222.72
X819	min	164 289.95	165 069.77	170 965.68	164 720.80	163 751.23
	max	165 571.48	166 640.37	173 391.76	\	\
	mean	164 926.41	165 895.78	172 410.12	165 565.79	164 826.42
	stdev	318.62	403.70	568.58	401.02	599.22
X916	min	341 649.91	342 796.88	357 391.57	342 993.01	341 369.36
	max	343 338.01	344 521.64	362 422.52	\	\
	mean	342 460.70	343 533.85	360 269.94	344 999.95	343 127.47
	stdev	510.66	556.98	1 192.57	905.72	877.97
X1001	min	77 476.36	78 053.86	78 832.90	76 297.09	75 666.26
	max	78 464.68	79 226.81	79 567.00	\	\
	mean	77 920.52	78 593.50	79 163.34	77 434.33	76 405.53
	stdev	234.73	306.27	229.19	719.86	337.78

注：“\”表示数据未给出或有误。

VNS、SA 和 GA 没有给出具体的算法细节,但从实验结果来看,三者应该不是单纯的传统算法。VNS 和 SA 属于基本个体的传统启发式算法,GA、BACO 和 CBACO 属于基于种群的元启发式算法。不同于大部分 NP-hard 问题中元启发式算法通常更优的现象,在 EVRP 中,二者的表现并没有相差太远。对于算例 E22、E23 和 E30,5 种算法均可以确保搜索到最优解。E33 的维度不高,但仅 VNS 能够搜索到最优解。从图 4 中观察 E33 的节点分布,可以看出其属于极端分布情况。由此可见,节点的分布对其求解难度有很大的影响。对于 E76 及以下维度的算例,基本可以确定已知最优解就是全局最优解。而对于更大规模的算例,目前并不能确定当前算法是否已经搜索到了全局最优解。已知最优解大部分由 CBACO 保持,小部分由 BACO 保持。但其余算法也有可取之处,

如 VNS 在 X916 中拥有最好的平均性能,SA 在 X573 中表现最好。

4 实际应用

电动车路径规划主要面向的是物流级的大规模应用场景,不同模型对应不同的使用场景,而实际场景往往比理论研究有更综合与复杂的约束。

少数学者使用企业的真实数据或场景进行了研究测试。Sassi 等^[55]依据现实场景,在模型中同时考虑了传统燃油车、异构的电动车、不同类型的充电站、部分充电、充电成本等因素。提出了一种多起点的局部搜索算法,在一组节点数量为 300~550 的真实数据算例上进行了测试。测试表明所提算法是有效的。Zhao 等^[56]研究了一家物流企业提出的现实车辆路径问题。基于 ALNS 和整数规划设计了一种启发式算法,使用现实场景生成

的20个算例进行实验。结果表明,该算法可以节省7.52%的运营成本。

上述研究均是学者在一些理想假设的特定环境下开展的,并未真正落地。随着电动汽车技术已经有了长足的进步和发展,也有部分物流企业已经开始使用电动汽车进行货物输送。在一些大型电商企业的整个仓储运行中,就采用了自动引导车辆(automated guided vehicle, AGV)进行货物运输调度。AGV是一种可以通过充电获得动力的运输车,在自动化生产和智能仓储等领域获得了广泛应用。国外电商平台亚马逊研发了一种称为KIVA的AGV自动搬运机器人,受到了国内外学者的广泛关注。国内的京东物流于2022年8月首批换电新能源车投入实际使用,成为全国首家规模化使用换电新能源车的物流企业。此外,国内的阿里巴巴上线了无人智能仓库,京东自动化仓库已大规模投入使用。在部分小区及校园内,阿里巴巴、京东、亚马逊等企业也已部署了新能源末端无人配送矩阵。但可惜的是,企业外部人员无法获取相关的数据,无法进一步了解企业的真实研发情况。

从结果来看,电动汽车路径规划的大部分研究还在理论阶段或小区域范围内,未有企业进行电动车的大规模、多方位物流应用,相关的研究也较少。除了算法性能的不足,还有一个可能的原因是受限于技术瓶颈和无人仓硬件等基础设施的建设。可以预见,随着电动车技术和相应基础设施的发展,电动汽车会在物流业有更大规模的发展和应用前景。

5 结论

随着人们环保意识的提高、相关政策的推动以及电动车技术的发展,电动汽车路径规划在这十余年间受到众多学者的研究与关注。模型从GVRP发展到EVRP,并产生了众多变体。求解方法有实验性的数学软件法和精确算法、目前应用

广泛的启发式算法,以及有发展前景的机器学习算法。

本文认为EVRPs发展的主要困难有2点:①求解难度很高。相关的高效求解算法研究目前还比较有限,对其进行更加深入的研究仍是该领域的关键研究方向;②当前的研究受制于电动车技术和基础设施,尤其是充电站的数量过少,大部分停留在理论阶段。随着电动车技术的发展和基础设施的完善,将模型和算法大规模地应用到现实场景将会是该领域的最终目标。

综上,在预估电动车技术和基础设施发展的前提下进行模型、算例的调整以及算法的改进可能是EVRPs将来主要的研究方向。

参考文献:

- [1] Maximilian Schiffer, Grit Walther. The Electric Location Routing Problem with Time Windows and Partial Recharging[J]. *European Journal of Operational Research*, 2017, 260(3): 995-1013.
- [2] 杨涛, 孙晓莉. 气候暖化和“双碳”目标约束下的大城市交通发展策略[J]. *交通与港航*, 2021, 8(6): 2-7.
Yang Tao, Sun Xiaoli. Transportation Development Strategy of Big Cities Under the Constraints of Climate Warming and "Carbon Peaking and Carbon Neutrality" Goal[J]. *Communication & Shipping*, 2021, 8(6): 2-7.
- [3] Bunsen T, Cazzola P, Gorner M, et al. Global EV Outlook 2018: Towards Cross-Modal Electrification[C]. International Energy Agency, Paris, France, 2018.
- [4] 刘丽丽, 刘同礼, 金小香. 电动汽车碳排放计算与跟踪评估的探讨[J]. *内燃机与配件*, 2022(1): 196-198.
Liu Lili, Liu Tongli, Jin Xiaoxiang. The Discussion of Calculation Method of Electric Vehicle Carbon Emission and Tracking Evaluation[J]. *Internal Combustion Engine & Parts*, 2022(1): 196-198.
- [5] Anagnostopoulou Afroditi, Maria Boile, Theofanis S, et al. Electric Vehicle Routing Problem with Industry Constraints: Trends and Insights for Future Research[J]. *Transportation Research Procedia*, 2014, 3: 452-459.
- [6] Dantzig G B, Ramser J H. The Truck Dispatching Problem[J]. *Management Science*, 1959, 6(1): 80-91.
- [7] Sevgi Erdoğan, Miller-Hooks E. A Green Vehicle Routing Problem[J]. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 2012, 48(1): 100-114.

- [8] Jia Yahui, Mei Yi, Zhang Mengjie. A Bilevel Ant Colony Optimization Algorithm for Capacitated Electric Vehicle Routing Problem[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(10): 10855-10868.
- [9] Qin Hu, Su Xinxin, Ren Teng, et al. A Review on the Electric Vehicle Routing Problems: Variants and Algorithms[J]. *Frontiers of Engineering Management*, 2021, 8(3): 370-389.
- [10] Bard J F, Huang Liu, Dror M, et al. A Branch and Cut Algorithm for the VRP with Satellite Facilities[J]. *IIE Transactions*, 1998, 30(9): 821-834.
- [11] Poonthalir G, Nadarajan R. A Fuel Efficient Green Vehicle Routing Problem with varying Speed Constraint (F-GVRP)[J]. *Expert Systems with Applications*, 2018, 100: 131-144.
- [12] Yu Yang, Wang Sihan, Wang Junwei, et al. A Branch-and-price Algorithm for the Heterogeneous Fleet Green Vehicle Routing Problem with Time Windows[J]. *Transportation Research Part B: Methodological*, 2019, 122: 511-527.
- [13] 狄卫民, 杜慧莉, 张鹏阁. 考虑动态拥堵的多车型绿色车辆路径问题优化[J]. *计算机工程与设计*, 2021, 42(9): 2614-2620.
- Di Weimin, Du Huili, Zhang Pengge. Optimization of Multi-vehicle Green Vehicle Routing Problem Considering Dynamic Congestion[J]. *Computer Engineering and Design*, 2021, 42(9): 2614-2620.
- [14] Lin J, Zhou Wei, Wolfson O. Electric Vehicle Routing Problem[J]. *Transportation Research Procedia*, 2016, 12: 508-521.
- [15] Michalis Mavrovouniotis, Charalambos Menelaou, Stelios Timotheou, et al. Benchmark Set for the IEEE WCCI-2020 Competition on Evolutionary Computation for the Electric Vehicle Routing Problem[EB/OL]. (2020-03-18) [2022-09-23]. <https://mavrovouniotis.github.io/EVRPcompetition2020/TR-EVRP-Competition.pdf>.
- [16] Jia Yahui, Mei Yi, Zhang Mengjie. Confidence-Based Ant Colony Optimization for Capacitated Electric Vehicle Routing Problem with Comparison of Different Encoding Schemes[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2022, 26(6): 1394-1408.
- [17] 齐元豪, 王凯, 付亚平. 基于头脑风暴算法的电动货车路径优化问题[J]. *计算机技术与发展*, 2020, 30(4): 74-78.
- Qi Yuanhao, Wang Kai, Fu Yaping. Path Optimization Problem of Electric Freight Car Based on Brainstorming Algorithm[J]. *Computer Technology and Development*, 2020, 30(4): 74-78.
- [18] Maurizio Bruglieri, Ferdinando Pezzella, Ornella Pisacane, et al. A Variable Neighborhood Search Branching for the Electric Vehicle Routing Problem with Time Windows[J]. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 2015, 47: 221-228.
- [19] Lin Bo, Bissan Ghaddar, Jatin Nathwani. Deep Reinforcement Learning for the Electric Vehicle Routing Problem with Time Windows[J]. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2022, 23(8): 11528-11538.
- [20] David L Cortés-Murcia, Caroline Prodhon, H Murat Afsar. The Electric Vehicle Routing Problem with Time Windows, Partial Recharges and Satellite Customers[J]. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 2019, 130: 184-206.
- [21] Schneider M, Stenger A, Goeke D. The Electric Vehicle-routing Problem with Time Windows and Recharging Stations[J]. *Transportation Science*, 2014, 48(4): 500-520.
- [22] 王琪琪, 李英, 李惠. 带软时间窗的电动车换电站选址路径问题研究[J]. *工业工程与管理*, 2019, 24(3): 99-106.
- Wang Qiyi, Li Ying, Li Hui. Battery Swap Station Location-routing Problem of Electric Vehicles with Soft Time Windows[J]. *Industrial Engineering and Management*, 2019, 24(3): 99-106.
- [23] Alejandro Montoya, Christelle Guéret, Jorge E Mendoza, et al. The Electric Vehicle Routing Problem with Partial charging and Nonlinear Charging Function[D]. University of Angers: LARIS, 2015.
- [24] Alejandro Montoya, Christelle Guéret, Jorge E Mendoza, et al. The Electric Vehicle Routing Problem with Nonlinear Charging Function[J]. *Transportation Research Part B: Methodological*, 2017, 103: 87-110.
- [25] Merve Keskin, Bülent Çatay. Partial Recharge Strategies for the Electric Vehicle Routing Problem with Time Windows[J]. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 2016, 65: 111-127.
- [26] Zuo Xiaorong, Zhu Chuan, Huang Changhao, et al. Using AMPL/CPLEX to Model and Solve the Electric Vehicle Routing Problem (EVRP) with Heterogeneous Mixed Fleet[C]//2017 29th Chinese Control and Decision Conference (CCDC). Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2017: 4666-4670.
- [27] Mauricio Granada-Echeverri, Luis Carlos Cubides, Jesús Orlando Bustamante. The Electric Vehicle Routing Problem with Backhauls[J]. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 2020, 11(1): 131-152.
- [28] Dominik Goeke, Michael Schneider. Routing a Mixed Fleet of Electric and Conventional Vehicles[J]. *European Journal of Operational Research*, 2015, 245(1): 81-99.
- [29] Simona Mancini. The Hybrid Vehicle Routing Problem[J].

- Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 2017, 78: 1-12.
- [30] 陈其赛, 倪静. 基于同时送取货电动车选址路径问题优化研究[J]. 上海理工大学学报, 2021, 43(5): 515-522.
Chen Qisai, Ni Jing. Optimization of Location and Routing Problem for Electric Vehicles Based on Simultaneous Delivery and Pickup[J]. Journal of University of Shanghai for Science and Technology, 2021, 43(5): 515-522.
- [31] Wang Liying, Song Yuanbin. Multiple Charging Station Location-routing Problem with Time Window of Electric Vehicle[J]. Journal of Engineering Science and Technology Review, 2015, 8(5): 190-201.
- [32] Juan Paz, Mauricio Granada-Echeverri, John Willmer Escobar. The Multi-depot Electric Vehicle Location Routing Problem with Time Windows[J]. International Journal of Industrial Engineering Computations, 2018, 9(1): 123-136.
- [33] Yang Jun, Sun Hao. Battery Swap Station Location-routing Problem with Capacitated Electric Vehicles[J]. Computers & Operations Research, 2015, 55: 217-232.
- [34] Almouhanna A, Carlos L Quintero-Araujo, Javier Panadero, et al. The Location Routing Problem Using Electric Vehicles with Constrained Distance[J]. Computers & Operations Research, 2020, 115: 104864.
- [35] Surendra Reddy Kancharla, Gitakrishnan Ramadurai. Electric Vehicle Routing Problem with Non-linear Charging and Load-dependent Discharging[J]. Expert Systems with Applications, 2020, 160: 113714.
- [36] Christofides N, Eilon S. An Algorithm for the Vehicle-dispatching Problem[J]. Journal of the Operational Research Society, 1969, 20(3): 309-318.
- [37] Solomon M M. Algorithms for the Vehicle Routing and Scheduling Problems with Time Window Constraints[J]. Operations Research, 1987, 35(2): 254-265.
- [38] Merve Keskin, Bülent Çatay. A Matheuristic Method for the Electric Vehicle Routing Problem with Time Windows and Fast Chargers[J]. Computers & Operations Research, 2018, 100: 172-188.
- [39] Merve Keskin, Gilbert Laporte, Bülent Çatay. Electric Vehicle Routing Problem with Time-dependent Waiting Times at Recharging Stations[J]. Computers & Operations Research, 2019, 107: 77-94.
- [40] Alberto Ceselli, Ángel Felipe, M Teresa Ortuño, et al. A Branch-and-cut-and-price Algorithm for the Electric Vehicle Routing Problem with Multiple Technologies[J]. Operations Research Forum, 2021, 2(1): 8.
- [41] 揭婉晨, 杨珺, 杨超. 多车型电动汽车车辆路径问题的分支定价算法研究[J]. 系统工程理论与实践, 2016, 36(7): 1795-1805.
Jie Wanchen, Yang Jun, Yang Chao. Branch-and-price Algorithm for Heterogeneous Electric Vehicle Routing Problem[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2016, 36(7): 1795-1805.
- [42] Wu Zhiguo, Zhang Juliang. A Branch-and-price Algorithm for Two-echelon Electric Vehicle Routing Problem[J]. Complex & Intelligent Systems, 2023, 9(3): 2475-2490.
- [43] Chungmok Lee. An Exact Algorithm for the Electric-vehicle Routing Problem with Nonlinear Charging Time[J]. Journal of the Operational Research Society, 2021, 72(7): 1461-1485.
- [44] Ece Naz Duman, Duygu Taş, Bülent Çatay. Branch-and-price-and-cut Methods for the Electric Vehicle Routing Problem with Time Windows[J]. International Journal of Production Research, 2022, 60(17): 5332-5353.
- [45] Deng Jiawen, Li Junqing, Li Chengyou, et al. A Hybrid Algorithm for Electric Vehicle Routing Problem with Nonlinear Charging[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2021, 40(3): 5383-5402.
- [46] 吴廷映, 孙灏. 考虑载重影响耗电率的电动车车辆路径问题[J]. 控制与决策, 2023, 38(2): 483-491.
Wu Tingying, Sun Hao. Electric Vehicle Routing Problem with Time Window and Linear Weight-related Discharging[J]. Control and Decision, 2023, 38(2): 483-491.
- [47] Zhu Yanfei, Lee K Y, Wang Yonghua. Adaptive Elitist Genetic Algorithm with Improved Neighbor Routing Initialization for Electric Vehicle Routing Problems[J]. IEEE Access, 2021, 9: 16661-16671.
- [48] Michalis Mavrovouniotis, Georgios Ellinas, Marios Polycarpou. Ant Colony Optimization for the Electric Vehicle Routing Problem[C]//2018 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI). Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2018: 1234-1241.
- [49] 张佳蕊. 半开放式燃油车和电动车混合车辆路径优化问题研究[J]. 汽车实用技术, 2022, 47(3): 55-63.
Zhang Jiarui. The Mixed Fleet Vehicle Routing Problem Optimization of Multi-depot Distribution with Time Windows[J]. Automobile Applied Technology, 2022, 47(3): 55-63.
- [50] Cheng Yiran, Szeto W Y. Artificial Bee Colony Approach to Solving the Electric Vehicle Routing Problem[J]. Journal of the Eastern Asia Society for Transportation Studies, 2017, 12: 975-990.
- [51] 张惠珍, 姜晶. 多车场多车型电动汽车路径优化研究[J]. 软件导刊, 2021, 20(8): 75-81.
Zhang Huizhen, Jiang Jing. Research on the Optimization of Multi-depot Heterogeneous Electric

- Vehicle Route[J]. Software Guide, 2021, 20(8): 75-81.
- [52] Wang Qing, Peng Shuai, Liu Shuan. Optimization of Electric Vehicle Routing Problem Using Tabu Search[C]// 2020 Chinese Control and Decision Conference (CCDC). Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2020: 2220-2224.
- [53] Sašo Karakatič. Optimizing Nonlinear Charging Times of Electric Vehicle Routing with Genetic Algorithm[J]. Expert Systems with Applications, 2021, 164: 114039.
- [54] 胡尚民, 沈惠璋. 基于强化学习的电动车路径优化研究[J]. 计算机应用研究, 2020, 37(11): 3232-3235.
Hu Shangmin, Shen Huizhang. Research on Electric Vehicle Routing Problem Based on Reinforcement Learning[J]. Application Research of Computers, 2020, 37(11): 3232-3235.
- [55] Ons Sassi, W Ramdane Cherif-Khettaf, Ammar Oulamara. Multi-start Iterated Local Search for the Mixed Fleet Vehicle Routing Problem with Heterogenous Electric Vehicles[C]// Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization. Cham: Springer International Publishing, 2015: 138-149.
- [56] Zhao Mengting, Lu Yuwei. A Heuristic Approach for a Real-world Electric Vehicle Routing Problem[J]. Algorithms, 2019, 12(2): 45.